

修 士 論 文

種数 3 の非特異トロピカル曲線のゴナリティ

首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻
学修番号 15878311

新庄みずほ

目 次

1	はじめに	3
2	距離付きグラフ	5
2.1	調和射	5
2.2	因子	7
3	トロピカル曲線	8
3.1	トロピカル射	10
3.2	因子	13
4	種数 3 の非特異トロピカル曲線	14
4.1	主定理	14
4.2	ゴナリティ	23

1 はじめに

トロピカル曲線は距離付きグラフとして実現され、距離付きグラフにもリーマン面と同様に種数と因子が定義される．近年、トロピカル曲線においても Riemann–Roch の定理が示され、古典的な代数曲線論における結果がトロピカル曲線に対しても成り立つことが期待されている．

正整数 d に対して以下の二つの同値な条件を満たすとき、コンパクトリーマン面 C は d -gonal であるという ([ACG]) ．

(1) C から P^1 への d 次の被覆写像が存在する．

(2) C 上に次数が d 、階数が 1 以上の因子が存在する．

この d の最小値を C のゴナリティと呼び、ゴナリティが 2 のとき超楕円的であるという．ゴナリティは代数曲線の基本的な不変量である．

一方、距離付きグラフ Γ に対しても対応した 2 種類の定義がある ([Ca14]) ．以下 Γ は木でないとする．

(1) Γ から木への d 次の有限調和射が存在するとき、 Γ は d -gonal であるという．

(2) Γ 上に次数が d で階数が 1 以上の因子が存在するとき、 Γ は divisorially d -gonal であるという．

この (2) の定義に代わり次の条件を考える．

(2') Γ 上に次数が d で階数が 1 の因子が存在するとき、 Γ は strictly divisorially d -gonal であるという ([T16]) ．

$d = 2$ の場合は (1) と (2') が同値な条件となり、このとき Γ は超楕円的であるという ([BN09],[Ch12],[KY15]) ．しかし、一般にはまだ同値であるかどうか未解決である．

本論文においては、Amini, Baker, Brugalle, Rabinoff [ABBR15] に従い、トロピカル曲線は距離付きグラフのトロピカル改変による同値類として定義する．また、距離付きグラフの各頂点の次数が 3 以下の時、グラフは非特異であるといい、非特異距離付きグラフのトロピカル改変による同値類を、非特異トロピカル曲線と呼ぶ．

ここでトロピカル改変とは、距離付きグラフに以下の 3 つの操作の有限回の繰り返しを施すことであり、距離付きグラフに同値関係を定める．

(1) 距離付きグラフに価数 2 の頂点を追加または削除する．

(2) 頂点に長さ無限の線分を付け加える．

(3) 価数 1 の頂点を含む辺を他方の頂点につぶす．

種数 3 の距離付きグラフで 4-gonal のものが、トロピカル改変を施すことにより 3-gonal となる例が、[CKK15] により与えられている．種数 3 のコンパクトリーマン面のゴナリティは 2 または 3 なので ([ACG])、ゴナリティの定義はトロピカル改変を許したほうが代数幾何学との対応が良いことが予想される．

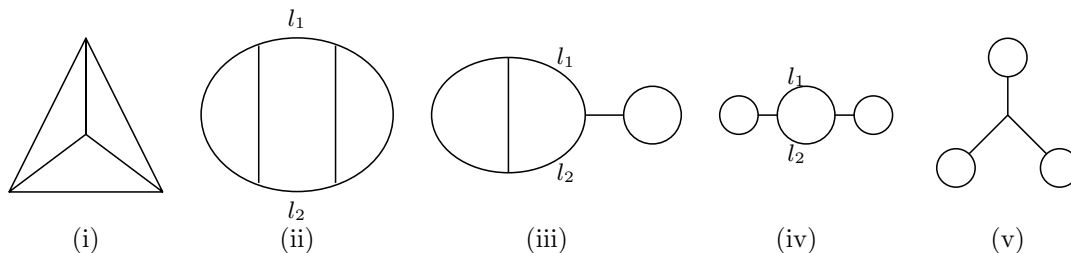
定義 1.0.1 (1) トロピカル曲線 Γ が d -gonal であるとは木への d 次有限調和射を持つような距離付きグラフとしての代表元が取れることである．この d の最小値をゴナリティといい、 $\text{gon}(\Gamma)$ と書く．

(2') トロピカル曲線 Γ が strictly divisorially d -gonal であるとは、次数が d 、階数が 1 の因

子を持つ代表元が取れることである．この d の最小値をトロピカル曲線の狭義因子的ゴナリティという．また狭義因子的ゴナリティが 2 の曲線を超楕円曲線と呼ぶ．

非特異トロピカル曲線に対しても超楕円曲線であることと 2-gonal であることは同値である．

種数 2 の非特異トロピカル曲線は超楕円的なので ([Ch12],[KY15])，種数 3 の非特異トロピカル曲線のゴナリティについて議論する．種数 3 の非特異トロピカル曲線 C は以下の 5 つの型に分類される．



(i) は各辺の長さによらず超楕円にはならない．(ii), (iii), (iv) は $l_1 = l_2$ の時のみ超楕円となる．(v) は常に超楕円である．

本論文では，種数 3 のすべての非特異トロピカル曲線について，この分類をもとに実際にトロピカル改変と有限調和射を与え，ゴナリティを決定した．

主定理 1 種数 3 の非特異トロピカル曲線 Γ のゴナリティは，

$$\text{gon}(\Gamma) = \begin{cases} 2 & (\Gamma: \text{超楕円}) \\ 3 & (\Gamma: \text{超楕円でない}) \end{cases}$$

である．

また，種数 3 の非特異トロピカル曲線は strictly divisorially 3-gonal であることから [T16]，以下の系が従う．

系 1.0.2 種数 3 の非特異トロピカル曲線において狭義因子的ゴナリティとゴナリティは一致する．

注 1.0.3 超楕円でない種数 3 の非特異距離付きグラフで，価数 1 の頂点がないものは，距離付きグラフとしては長さによらず strictly divisorially 3-gonal だが，3-gonal であるかどうかは各辺の長さによる．

謝辞

本研究を進めるにあたり，ご指導賜りました小林正典准教授に敬意を表するとともに，厚く御礼申し上げます．また，日ごろから相談に乗ってくれた研究室のメンバーにこの場を借りて感謝の意を表します．

2 距離付きグラフ

最初に距離付きグラフとその諸概念に対して定義を与える．これらの定義は，[Ca14], [ABBR15] の定義を参考に行っている．

Γ をループや多重辺を許した有限連結グラフの台とする．

定義 2.0.1 Γ 上の点 p に対してその十分小さな近傍を $U_p \subset \Gamma$ とする． $U_p \setminus \{p\}$ の連結成分の個数を点 p の価数といい， $\text{val}(p)$ と表す．

価数が2でない点を， essential vertex と呼び，この点の集合を V_e と書く．

定義 2.0.2 Γ の価数1の点全体の集合を V_∞ とする． V_∞ の部分集合 I で $\Gamma \setminus I$ の各辺が \mathbf{R} の部分集合として距離が定まるものが存在するとき， Γ 上に V_e の元をすべて含むような Γ の有限個の点集合を頂点集合とする，グラフの構造 G を入れた $\Gamma(G)$ を距離付きグラフという．また，辺は $\Gamma \setminus V(G)$ の連結成分の閉包とし，辺集合を $E(G)$ と書く． $V(G) = V_e$ となると G は Γ に対して一意に定まり，これを Γ の標準モデルという．

注 2.0.3 I はできうる限り要素の少ないものを取る．このとき I の元を無限遠点と呼ぶ．以後，図で無限遠点を表すときは白丸 \circ で表す．

Γ 上の任意の2点 u, v の距離 $d(u, v)$ は u, v を結ぶ道のうち最短のものの長さで定義する．ただし， Γ 上の任意の点 p と無限遠点との距離は常に $+\infty$ であるとする．また，辺 e の長さを $\ell(e)$ と書くことにする．

グラフの各辺に中点を与える．辺の長さが $+\infty$ の時は中点が定められないので，辺の内点の一つをを固定し中点の代わりとする．無限遠点を除く頂点からその隣の中点への有向辺を G の half edge といい， v から出る half edge の集合を $H_v(G)$ と書く．

辺 e が Γ の bridge であるとは， $\Gamma \setminus e^\circ$ が非連結となることをいう．ここで， e° は e の内部のことである．

定義 2.0.4 距離付きグラフ Γ の種数は第一ベッチ数として定義する．

Γ に付随するグラフを G と書くとする，種数 $g(\Gamma)$ は， $g(\Gamma) = \#E(G) - \#V(G) + 1$ で計算できる．これはリーマン面とまったく同様の定義である．

さらにゴナリティを定義する際に必要な，調和射や因子の定義を距離付きグラフの場合に確認する．

2.1 調和射

定義 2.1.1 Γ, Γ' を距離付きグラフとし， $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ を位相空間としての連続写像とする． Γ, Γ' に付随するグラフ G, G' として以下の条件を満たすものが取れるとき， φ は射であるという．

- (1) Γ の頂点 $v \in V(G)$ の φ で写した $\varphi(v)$ は Γ の頂点となる．
- (2) Γ' の辺 e' の逆像は， Γ の有限個の辺の和集合となる．
- (3) Γ の辺 e に対し φ の e への制限は，非負整数倍の相似写像になる．
- (3) の相似写像の倍率となっている整数を $d_e(\varphi) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ と表す．

Γ の辺 e が φ により頂点に移ることは、 $d_e(\varphi) = 0$ の必要十分条件である。任意の Γ の辺 e に対して $d_e(\varphi) > 0$ の時、 φ は有限であるという。

また、グラフに対して half edge を定義したが、 G の辺 e に含まれる half edge h に対して、 $d_h(\varphi) := d_e(\varphi)$ と定義する。

定義 2.1.2 $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ を距離付きグラフの射であるとする。

p を Γ 上の点とし、 $p' := \varphi(p) \in \Gamma'$ とする。また、点 p' から出ている half edge を $h_1', h_2', \dots \in H_{p'}(G')$ とする。

φ が p で調和であるとは、点 p' から出ている half edge h_i' によらず、 $\sum_{h \rightarrow h_i'} d_h(\varphi)$ (ただし、 h は点 p から出ている half edge で、 φ により h_i' へ行くもの) が一定となることをいう。この値 $\sum_{h \rightarrow h_i'} d_h(\varphi)$ を $d_p(\varphi)$ と書き、 φ の p での次数と呼ぶ。

また、 φ が全射でかつ、任意の点 $p' \in \Gamma'$ で調和となっているとき、 φ は調和射であるという。このとき、 φ の次数を $\deg(\varphi) = \sum_{p \rightarrow p'} d_p(\varphi)$ で定める。

命題 2.1.3 次数 $\deg(\varphi)$ は $p' \in \Gamma'$ に依らず一定になる。

証明 Γ' の任意の頂点に対して、隣り合う頂点の次数が変化しないことを示せば、グラフの連結性から成り立つ。辺 $e' \in E(G')$ とし、 e' の両端にある頂点を p', q' とする。 p' における φ の次数 $\deg_{p'}(\varphi)$ は、

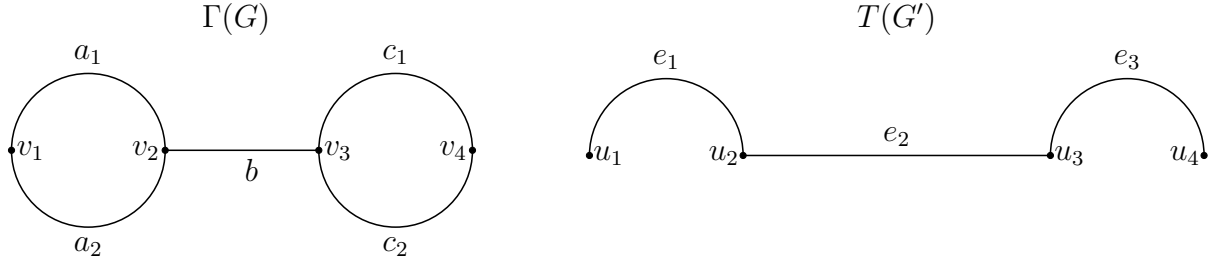
$$\begin{aligned} \deg_{p'}(\varphi) &= \sum_{p \rightarrow p'} d_p(\varphi) \\ &= \sum_{p \rightarrow p'} \left(\sum_{h_p \rightarrow h_{p'}} d_{h_p}(\varphi) \right) \\ &= \sum_{p \rightarrow p'} \left(\sum_{e_p \rightarrow e'} d_{e_p}(\varphi) \right) \\ &= \sum_{e \rightarrow e'} d_e(\varphi) \end{aligned}$$

同様に q' における φ の次数 $\deg_{q'}(\varphi)$ を計算すると、

$$\deg_{q'}(\varphi) = \sum_{e \rightarrow e'} d_e(\varphi)$$

となるので、隣り合う頂点の次数は等しくなる。よって φ の次数は Γ' の頂点に依らず一定になる。

例 2.1.4 距離付きグラフ Γ, T に対して、次のようなグラフの構造 G, G' をそれぞれ与える。



$$E(G) = \{a_1, a_2, b, c_1, c_2\}$$

$$V(G) = \{v_i \mid i = 1, \dots, 4\}$$

$$E(G') = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$V(G') = \{u_i \mid i = 1, \dots, 4\}$$

辺の長さは, $\ell(e_1) = \ell(a_i)$, $\ell(e_2) = 2\ell(b)$, $\ell(e_3) = \ell(c_i)$ とする.

このとき, $\varphi : \Gamma(G) \rightarrow T(G')$ を以下のように定める.

$$\begin{array}{rclcl}
 \Gamma(G) & \longrightarrow & T(G') & & \\
 \text{頂点} & v_i & \mapsto & u_i & (i = 1, 2, 3, 4) \\
 & \varphi(a_i) & = & e_1 & (i = 1, 2) \\
 \text{辺} & \varphi(b) & = & e_2 & \\
 & \varphi(c_i) & = & e_3 & (i = 1, 2)
 \end{array}$$

φ は 2 次有限調和射となる.

命題 2.1.5 距離付きグラフ間の有限調和射 $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ において, $p \in \Gamma$ の価数は $\varphi(p) \in \Gamma'$ の価数より小さくなることはない.

証明 $p' = \varphi(p)$ とし, $\text{val}(p) < \text{val}(p')$ と仮定する. このとき, 不等式の条件から $h' \in H_{p'}(G')$ で, 点 p から移ったものでないものが存在する. この h' において $\sum_{h \rightarrow h'_i} d_h(\varphi) = 0$ なので φ が調和射であることと, 辺の次数は非負整数であることから, 任意の $h \in H_p(G)$ に対して $d_h(\varphi) = 0$ が成り立つが, これは射が有限であることに矛盾する. よって, $\text{val}(p) \geq \text{val}(p')$ である.

定義 2.1.6 [Ca14, Def.2.9] Γ から木への d 次有限調和射が存在するとき, Γ は d -gonal であるという.

2.2 因子

定義 2.2.1 Γ 上の元で生成される自由アーベル群を $\text{Div}(\Gamma)$ と書き, $\text{Div}(\Gamma)$ の元 D を Γ 上の因子という. 因子 $D = \sum_{p \in \Gamma} a_p \cdot p$ は任意の p で $a_p \geq 0$ のとき, D は有効因子であるという.

D の次数 $\deg(D)$ を, 各点の係数の和で定義し, 次数 k の有効因子全体の集合を $\text{Div}_+^k(\Gamma) = \{E \in \text{Div}(\Gamma) \mid E \geq 0, \deg(E) = k\}$ と書く.

以下, 恒等的に $-\infty$ の関数は考えないことにする. Γ 上の有理関数とは, Γ 上区分的に線形な連続関数で傾きが整数のものをいう. 有理関数 f の Γ の点 p での外向き方向微分の

和を $\text{ord}_p(f)$ と書くと,

$$\text{div}(f) := \sum_{p \in \Gamma} \text{ord}_p(f) \cdot p$$

は Γ 上の因子となる. $\text{div}(f)$ を Γ の主因子という. Γ 上の二つの因子 D, E が線形同値とは, $D - E = \text{div}(f)$ となる有理関数 f が存在することで, このとき $D \sim E$ と書く. Γ の因子 D に付随する完備線形系 $|D|$ は, 次のように定義される.

$$|D| = \{E : \text{有効因子} \mid E \sim D\}$$

定義 2.2.2 Γ 上の因子 D の階数を以下のように定義する.

$$\text{rank}(D) = \begin{cases} -1 & (|D| = \emptyset) \\ \max\{k \in \mathbf{Z} \mid |D - E| \neq \emptyset \ \forall E \in \text{Div}_+^k(\Gamma)\} & (|D| \neq \emptyset) \end{cases}$$

定義 2.2.3 [Ca14, Def.1.10] Γ 上に次数が d で階数が 1 以上の因子 D が存在するとき, Γ は divisorially d -gonal であるという.

特に因子 D の階数が 1 となるととき strictly divisorially d -gonal と呼ぶ [T16].

定義 2.2.4 [BN09, 5.1] 距離付きグラフ Γ が strictly divisorially 2-gonal のとき, Γ を超楕円的であるという. Riemann–Roch の定理より, 超楕円的なグラフは種数が 2 以上であり, グラフの Clifford の定理より, 種数が 2 以上のグラフ上の因子の次数が 2 ならば, 階数が 1 以上であることと階数が 1 となることは同値である.

超楕円的なグラフに関しては以下の定理が知られている.

定理 2.2.5 [BN09, Thm 5.12] 種数 2 以上の bridge を持たないグラフ G に対し以下は同値である.

- (1) G は超楕円的である.
- (2) 位数 2 の自己同型写像 $\iota : G \rightarrow G$ で G/ι が木となるものが存在する.
- (3) 木への 2 次有限調和射が存在する.

定理 2.2.6 [Ch12, Thm.3.13] Γ が価数 1 の点のない距離付きグラフとし, (G, ℓ) をその標準モデルとする. このとき以下は同値である.

- (1) Γ は超楕円的である.
- (2) G/ι が木となるような ι が存在する.
- (3) G から木への 2 次有限調和射が存在する.

3 トロピカル曲線

[ABBR15] に従い, 距離付きグラフ間の同値関係を導入し, トロピカル曲線を定義する.

定義 3.0.1 Γ_0 を距離付きグラフとする. 以下の 3 つの操作の有限回の繰り返しをトロピカル改変という.

- (1) 価数 2 の点に頂点を追加または削除する.
- (2) 半直線上の点 $0 \in [0, +\infty]$ と Γ_0 の点 v を同一視するように半直線を Γ_0 に付け加える.
- (3) 価数 1 の頂点を含む辺を他方の頂点につぶす.

注 3.0.2 距離付きグラフ Γ' が Γ のトロピカル改変により得られることを, $\Gamma' \sim \Gamma$ と表すと, これは同値関係である. また, Γ から, Γ' を得るのにかかる手数の最小値をトロピカル改変の長さと呼ぶ.

例 3.0.3 下の図における (i) から (vi) の操作は以下の通りである.

- (i) 頂点 v_0 を追加する.
- (ii) 頂点 v_0 を削除する.
- (iii) 頂点 v_0 に線分 e を付け加える.
- (iv) 線分 e に頂点 v_1 を追加する.
- (v) 頂点 i_0 を含む辺 e_0 をつぶす.
- (vi) 頂点 v_1 を含む辺 e_1 をつぶす.

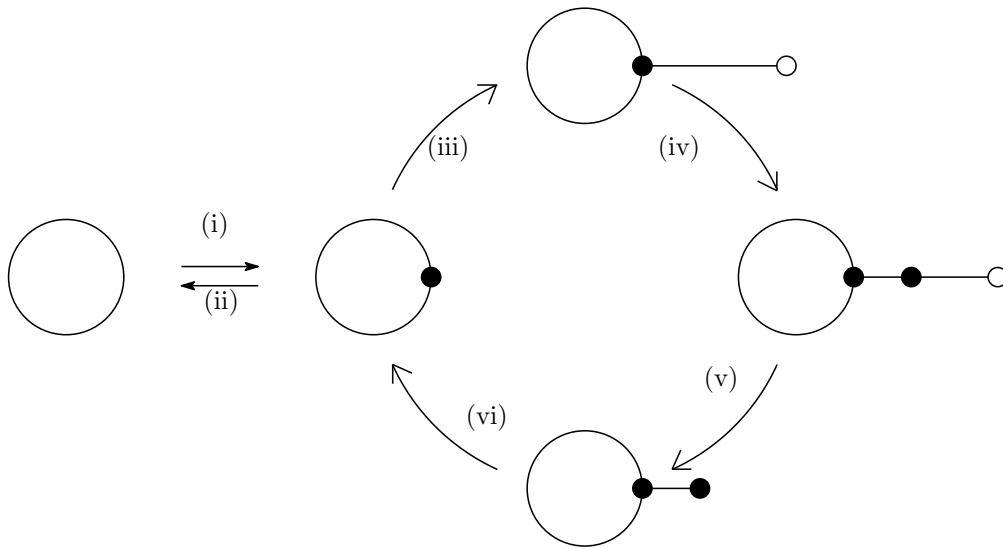


図 1: トロピカル改変

注 3.0.4 距離付きグラフに長さ有限の辺を付け加えたい場合は, 例 3.0.3 の (iii)(iv)(v) の操作を順に行えばよい.

定義 3.0.5 距離付きグラフのトロピカル改変による同値類をトロピカル曲線といい, 非特異距離付きグラフのトロピカル改変による同値類を非特異トロピカル曲線という. また, トロピカル改変によりつぶせる辺や頂点をすべてつぶした代表元をトロピカル曲線の極小モデルという.

注 3.0.6 非特異トロピカル曲線の代表元 Γ, Γ' はトロピカル改変の長さが 1 より大きい場合, トロピカル改変の途中では非特異ではない可能性がある. つまり, トロピカル改変は特異性, 非特異性を保つように作られたものではないので, 非特異距離付きグラフと, そうでないものが同値関係で結ばれる. トロピカル改変の定義を次のように変えることで, 非特異グラフとそうでないものを分離できるトロピカル改変が得られる.

(2') 半直線を Γ_0 の価数が3でない頂点に付け加える.

(3') 価数1の頂点を含み他方の頂点の価数が4でない辺をつぶす.

本論文では非特異トロピカル曲線について議論するので、辺を価数2の頂点のみに付け加えることにすれば非特異性は保たれる. また価数1の頂点に辺を付け加える操作, 以下の図2のように (1)(2')(3) の操作の組み合わせにより実現されるので, 価数2の頂点のみに制限できる.

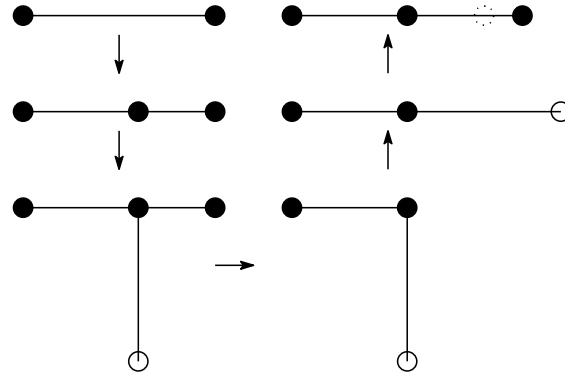


図 2: 辺を伸ばす操作

命題 3.0.7 トロピカル改変により種数は変化しない.

証明

Γ_0 を距離付きグラフ, G_0 を Γ_0 に付随するグラフ構造とする.

各操作により, 種数が変化しないことをそれぞれ確認すればよい. 操作により $\Gamma_0(G_0)$ から得られる距離付きグラフを $\Gamma_1(G_1)$ と書く. 各操作による頂点と辺の数の変化は以下の通り.

操作	頂点	辺
(1) 追加	+1	+1
(1) 削除	-1	-1
(2)	+1	+1
(3)	-1	-1

実際に計算することで種数が変化しないことを確認できる.

$$\begin{aligned}
g(\Gamma_1) &= \#E(G_1) - \#V(G_1) + 1 \\
&= (\#E(G_0) \pm 1) - (\#V(G_0) \pm 1) + 1 \\
&= \#E(G_0) - \#V(G_0) + 1 \\
&= g(\Gamma_0)
\end{aligned}$$

3.1 トロピカル射

トロピカル曲線間の射についても [ABBR15] でよく議論されている.

定義 3.1.1 [ABBR15] Γ, Γ' を距離付きグラフとし、距離付きグラフとしての調和射 $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ が存在するとする。また、 C, C' を Γ, Γ' をそれぞれ代表元に持つトロピカル曲線とする。 $\varphi_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma'_1$ が φ の基本トロピカル改変であるとは、 Γ'_1 が Γ から長さ 1 のトロピカル改変で得られる距離付きグラフであり、 Γ_1 が、 Γ のトロピカル改変により得られ、次の可換図式を満たすことをいう。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \longrightarrow & \Gamma'_1 \\ \wr & & \wr \\ \Gamma & \longrightarrow & \Gamma' \end{array}$$

が以下の条件を満たすようなものとして存在することである。

また、 φ のトロピカル改変とは、基本トロピカル改変の有限回の繰り返しで得られるものをいう。さらに、 φ_1, φ_2 がトロピカル同値であるとは、距離付きグラフの調和射 ψ が存在して、 $\varphi_1 \sim \psi$ かつ $\varphi_2 \sim \psi$ となることである。

定義 3.1.2 [ABBR15] トロピカル曲線 C, C' 間のトロピカル射とは、トロピカル曲線の代表元間の有限調和射の同値類のことである。

定義 3.1.3 トロピカル曲線 C が d -gonal とは、 C から T への次数が d のトロピカル射が存在することをいう。

補題 3.1.4 非特異トロピカル曲線 C から木 T へ d 次トロピカル射が存在するならば、 C から T へは $d+1$ 次の射も存在する。

証明 T の長さ有限の辺を一つ選んで固定し、その辺を e とする。この辺の引き戻しとなる辺を e_1, e_2, \dots, e_n とし、各 e_i の中点をトロピカル改変により頂点 v_i とする。さらに各 v_i から、長さ k/d_{e_i} の辺をトロピカル改変により付け加える。この距離付きグラフを $\tilde{\Gamma}$ とする。また、 e の中点に長さ k の辺を付け加えた距離付きグラフを \tilde{T} とすると、 d 次有限調和写像 $\tilde{\varphi} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{T}$ が構成できる。 v_1 に付け加えた辺の端点を v_0 とし、この頂点から \tilde{T} と対応するようにトロピカル改変をさらに施すことで $d+1$ 次の有限調和射が得られる。

例 3.1.5 図 3 を用いて説明する。 Γ_0 を各辺の長さが等しい種数 2 の非特異距離付きグラフとすると、この $\varphi : \Gamma_0 \rightarrow T$ は次数 3 の有限調和射となっている。 Γ と T の各辺の中点に長さ k の辺を付け加えることで、 $\tilde{\Gamma}_0$ と \tilde{T} 、そして 3 次有限調和射 $\tilde{\varphi}$ を得る。 $\tilde{\Gamma}_0$ にさらにトロピカル改変を施し $\tilde{\Gamma}_1$ を得ることで、 \tilde{T} への 4 次有限調和射が構成できる。

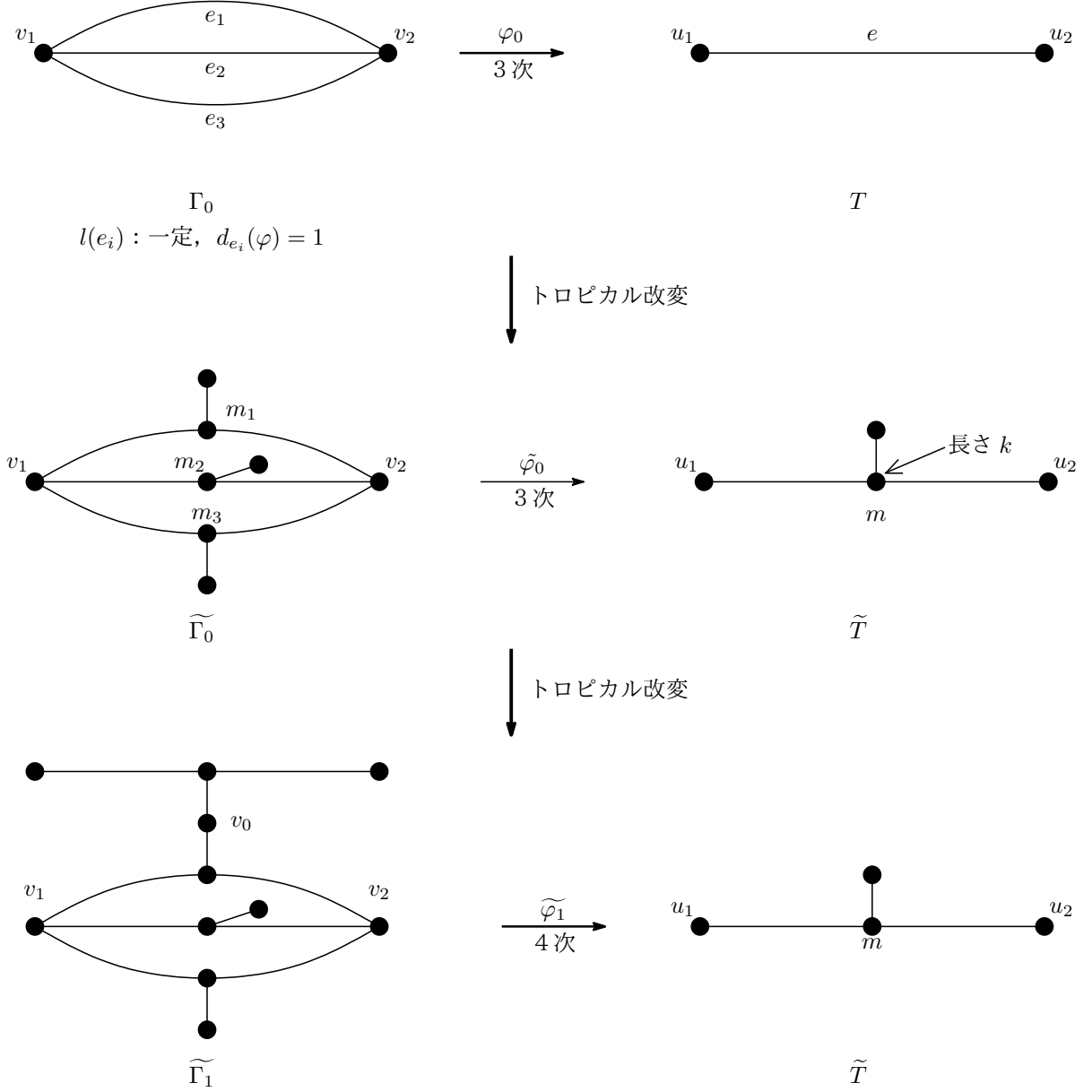


図 3: 4 次有限調和射

補題 3.1.6 トロピカル改変により, d 次トロピカル射を $d + 1$ 次の射に拡張できる場合, 同様にして $d + 2$ 次の射が作れる.

証明 d 次から $d + 1$ 次の有限調和射を作る際に付け加えた半直線上にさらに適当な頂点と, 必要ならさらにトロピカル改変を与えることで $d + 2$ 次の有限調和射も作れる.

例 3.1.7 例 3.1.5 の設定を用いて説明する. 図 4 のように $\widetilde{\Gamma}_1$ にさらにトロピカル改変を施すことで, Γ_0 のトロピカル改変 $\widetilde{\Gamma}_2$ が得られ, \widetilde{T} への有限調和射が 5 次となる.

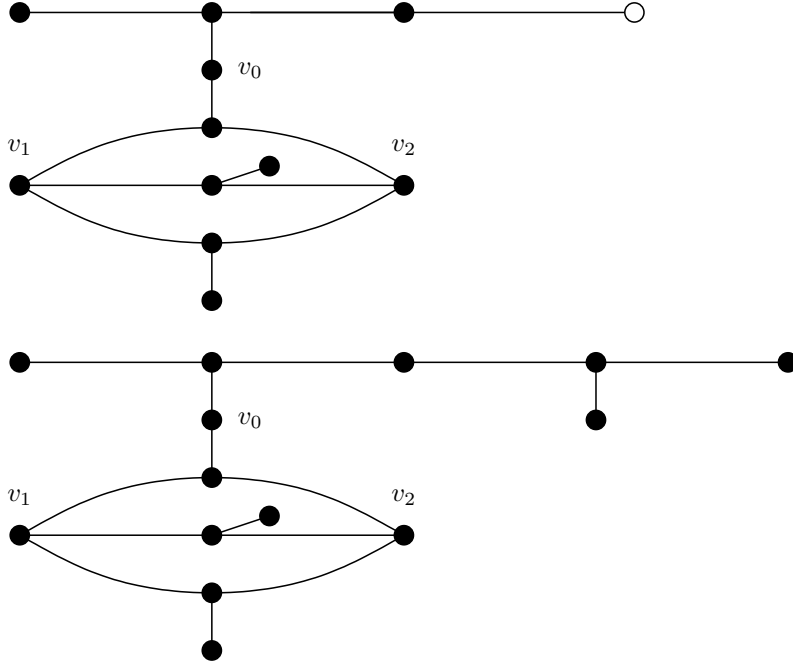


図 4: 5 次有限調和射

命題 3.1.8 非特異トロピカル曲線 Γ が d -gonal ならば, d より大きい任意の整数 d' に対して Γ は d' -gonal である.

証明 二つの補題 3.1.4, 3.1.6 により, d の数学的帰納法として示される.

注 3.1.9 コンパクトリーマン面では, 種数 4 以下の場合 \mathbf{P}^1 への被覆は 2 または 3 どちらか一方であるが ([ACG]), トロピカル曲線の場合は最小値が重要となる.

注 3.1.10 トロピカル曲線 Γ の d -gonal となる d の最小値を Γ のゴナリティと呼び, $\text{gon}(\Gamma)$ と書く.

3.2 因子

Γ, Γ' をトロピカル曲線 C の代表元とする. Γ 上に $\deg(D) = d, \text{rank}(D) = r$ の因子 D が存在すると, Γ' 上にも $\deg(D') = d, \text{rank}(D') = r$ を満たす因子 D' が存在することがわかる [KY15]. よって, トロピカル曲線上にも因子を用いたゴナリティの定義が与えられる.

定義 3.2.1 トロピカル曲線 C の代表元 Γ が Γ 上に次数が d , 階数が 1 以上の因子をもつとき C は divisorially d -gonal であるという. また, 次数 d の最小値を因子的ゴナリティという.

定義 3.2.2 Γ はさ Γ 上に, 次数が d で階数が 1 となる因子を持つとき, C は strictly divisorially d -gonal であるという. この d の最小値を狭義因子的ゴナリティという.

距離付きグラフには、超楕円的であることが定義されていたので、トロピカル曲線にも超楕円曲線を定義する。

定義 3.2.3 トロピカル曲線 C は狭義因子的ゴナリティが2の時超楕円曲線という。

注 3.2.4 C を種数が2以上のトロピカル曲線とする。 C の各代表元に対して定義 2.2.4 より divisorially 2-gonal であることと strictly divisorially 2-gonal であることは同値なので、トロピカル曲線 C においても超楕円曲線であることと、因子的ゴナリティが2であることは同値となる。

また距離付きグラフにおける同値性から以下の定理が成り立つ。

定理 3.2.5 非特異トロピカル曲線において、超楕円であることと $\text{gon}(\Gamma) = 2$ であることは同値である。

定理 3.2.6 種数2の非特異トロピカル曲線は超楕円である。

4 種数3の非特異トロピカル曲線

定理 4.0.1 種数3のトロピカル曲線は図5で示した5つの型に分類でき、各型が超楕円となる場合についても知られている。

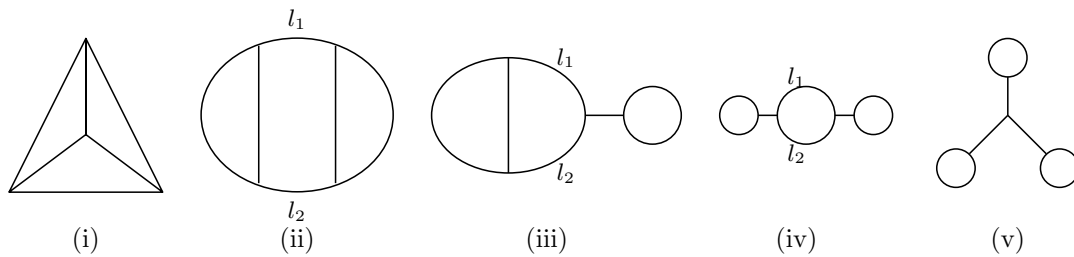


図 5: 種数3の非特異トロピカル曲線の極小モデル

4.1 主定理

定理 4.1.1 [主定理] Γ を種数3の非特異トロピカル曲線とする。このとき、

$$\text{gon}(\Gamma) = \begin{cases} 2 & (\Gamma: \text{超楕円}) \\ 3 & (\Gamma: \text{超楕円でない}) \end{cases}$$

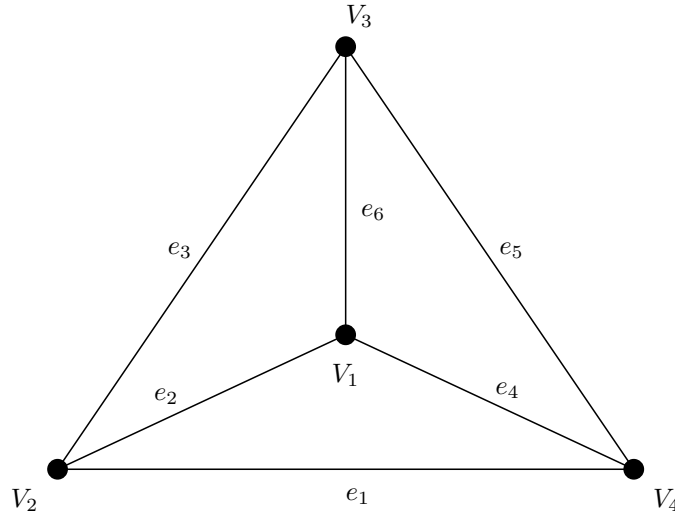
である。

例 4.1.2 [CKK15] 図5の (i) の場合について、このグラフから木への4次有限調和射と、このグラフにトロピカル改変を施して得られたグラフで木への3次有限調和射を持つ例を与えている。

この例では非特異性が保たれないため、非特異曲線のみを扱う本論文では工夫が必要となるが、この例はトロピカル曲線のゴナリティを考える際に同値類を込めて考えることの必要性を示唆している．注 3.0.6 から、価数 2 の頂点のみに辺を付け加えれば、トロピカル改変の結果として非特異のグラフが得られることを利用する．

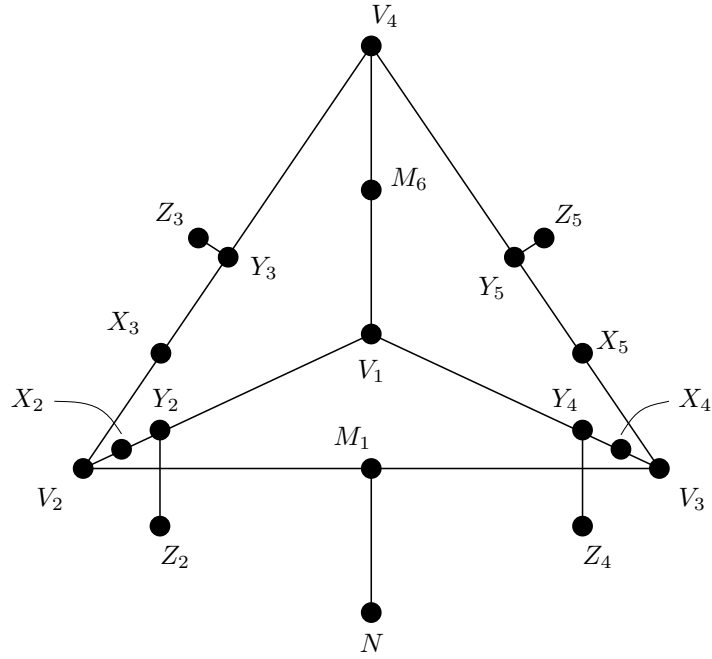
主定理 4.1.1 の証明 定理 3.2.5 より、 Γ が超楕円曲線であることと $\text{gon}(\Gamma) = 2$ 同値である．つまり、 Γ が超楕円的でない場合は、 $\text{gon}(\Gamma) \geq 3$ となる．超楕円的でない曲線すべてに、代表元 Γ_1 と木 T へのトロピカル射 φ を具体的に与える．以後辺 e_i の長さを ℓ_i と書く．また、 Γ は、図 5 のように極小モデルとしている．

(i) の場合 長さが最短の辺を e_1 とし、 e_1 と隣り合わない辺を e_6 として e_1 と隣り合う辺のうち最短のものを e_2 とする． e_1 と e_2 が共有する頂点を V_2 とし、この頂点から出る残りの辺を e_3 とする． e_1, e_2, e_3 の V_2 でないほうの端点をそれぞれ V_4, V_1, V_3 とし、 V_1, V_4 の間の辺を e_4 、 V_3, V_4 の間の辺を e_5 とする．

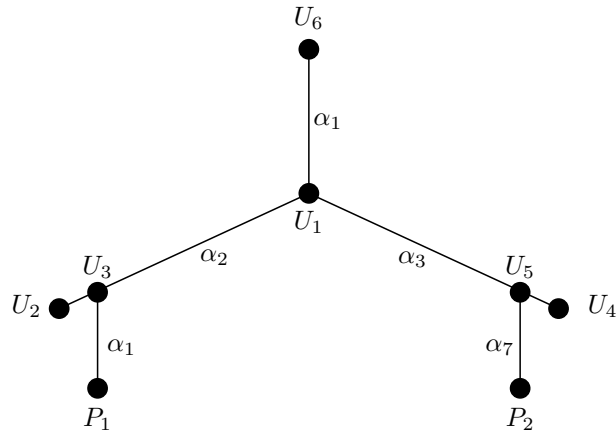


この Γ に対してトロピカル改変により代表元 Γ_1 を得る．頂点の取り方は次のとおりとする．

- | | | |
|---|--|----------------|
| { | M_i : 辺 e_i の中点. | ($i = 1, 6$) |
| | X_i : M_1 と V_1 から等距離の、 e_i 上の点. | ($i = 2, 4$) |
| | X_i : M_1 と V_2 から等距離の、 e_i 上の点. | ($i = 3, 5$) |
| | Y_i : X_i からの距離が、 V_2 と等しくなる点. | ($i = 2, 3$) |
| | Y_i : X_i からの距離が、 V_3 と等しくなる点. | ($i = 4, 5$) |
| | Z_i : Y_i に付け加えた辺の端点．辺の長さは $d(Y_i, Z_i) = d(V_2, X_{5-i})$. | ($i = 2, 3$) |
| | Z_i : Y_i に付け加えた辺の端点．辺の長さは $d(Y_i, Z_i) = d(V_3, X_{9-i})$. | ($i = 4, 5$) |
| | N : M_1 に付け加えた辺の端点．辺の長さは $d(M_1, N) = \ell_6/2$. | |



図のように T を与える．各辺の長さを下の表で与えたようにすると， Γ_1 との間に下の表のような対応で 3 次の有限調和射ができる．ここで， $[v, v']$ で，頂点 v, v' を持つ辺を表し， $d_{[v, v']}(\varphi) = 1$ のときは， $(d_e(\varphi))$ の欄は省略する．

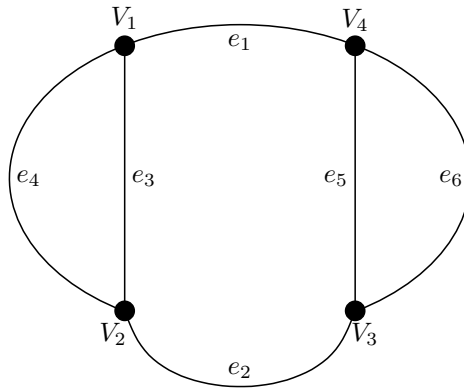


$\alpha_i \in E(T)$	$\ell(\alpha_i)$	$e = \varphi^{-1}(\alpha_i) \in E(\Gamma_1) \ (d_e(\varphi))$
α_1	$\ell_6/2$	$[V_1, M_6], [V_3, M_6], [M_1, N]$
α_2	$\ell_1/2$	$[V_1, Y_2], [V_3, Y_3], [M_1, V_2]$
α_3	$\ell_1/2$	$[V_1, Y_4], [V_3, Y_5], [M_1, V_4]$
α_4	$\ell_2/2 - \ell_1/4$	$[V_2, X_2], [Y_2, X_2], [Y_3, Z_3]$
α_5	$\ell_3/2 - \ell_1/4$	$[V_3, X_3], [Y_3, X_3], [Y_2, Z_2]$
α_6	$\ell_4/2 - \ell_1/4$	$[V_4, X_4], [Y_4, X_4], [Y_5, Z_5]$
α_7	$\ell_5/2 - \ell_1/4$	$[V_5, X_5], [Y_5, V_5], [Y_4, Z_4]$

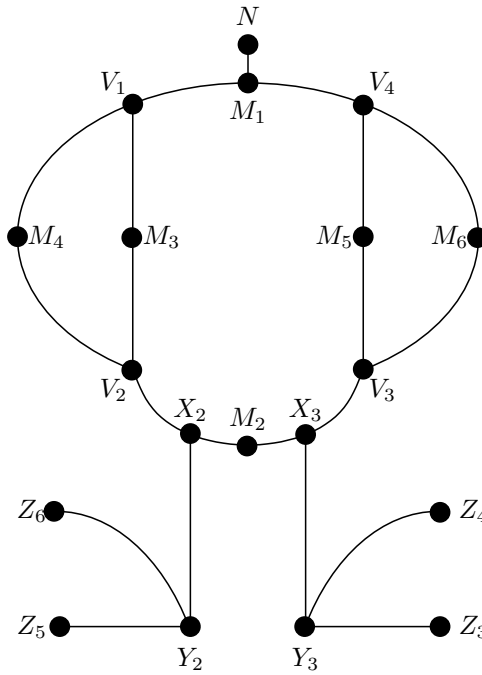
$v \in V(T)$	$\varphi^{-1}(v)$
U_1	V_1, V_3, M_1
U_2	V_2, Y_2, Y_3
U_3	X_3, Z_2
U_4	V_4, Y_4, Y_5
U_5	X_4, Z_5
U_6	M_6, N
P_1	X_2, Z_3
P_2	X_5, Z_4

以降, (1) の場合と同様にして極小モデル Γ の辺, 頂点に条件に従って名前を付け, 代表元 Γ_1 , 木 T , と φ での対応表を与えていく.

(ii) $l_1 < l_2$ の場合 l_1, l_2 は図 5 のように, 二重辺でない辺とし, $l_1 < l_2$ を満たすとする. 残りの辺で最短の辺を, e_3 とし, e_3, e_4 が二重辺の組になっているとする. e_5, e_6 も二重辺になっていて, $l_5 \leq l_6$ を満たすとする. 頂点の番号は図のとおりとする.



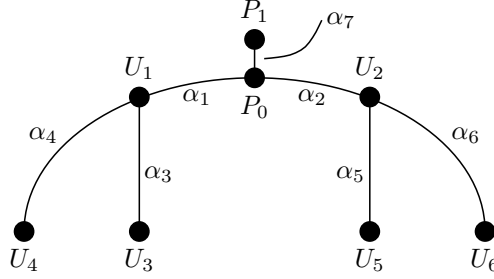
Γ_1 は図のように与える.



Γ_1 の頂点の取り方は以下のとおりとする.

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_i : \text{辺 } e_i \text{ の中点.} & (i = 1, \dots, 6) \\ X_i : d(V_i, X_i) = \ell_1/2 \text{ となる } e_2 \text{ 上の点.} & (i = 2, 3) \\ Y_i : X_i \text{ に付け加えた辺上の点で, } d(X_i, Y_i) = \ell_1/2 \text{ となる点.} & (i = 2, 3) \\ Z_i : Y_3 \text{ に付け加えた辺の端点で, } d(Z_i, Y_3) = \ell_i/2 \text{ となる点.} & (i = 3, 4) \\ Z_i : Y_2 \text{ に付け加えた辺の端点で, } d(Z_i, Y_2) = \ell_i/2 \text{ となる点.} & (i = 5, 6) \\ N : M_1 \text{ に付け加えた辺の端点で, } d(M_1, P) = \ell_2/2 - \ell_1/2 \text{ となる点.} & \end{array} \right.$$

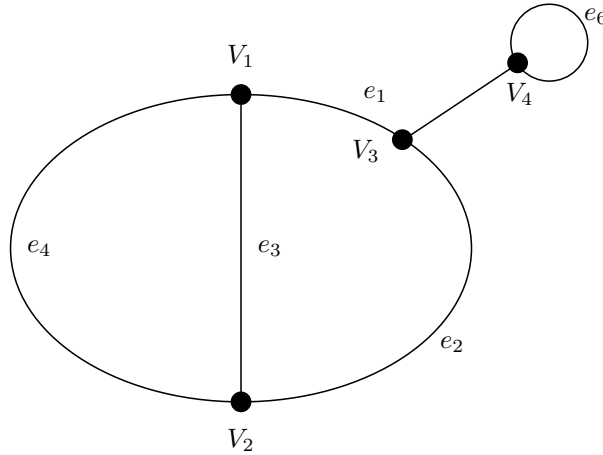
T と, 辺の長さと φ の対応をまとめた表を与える.



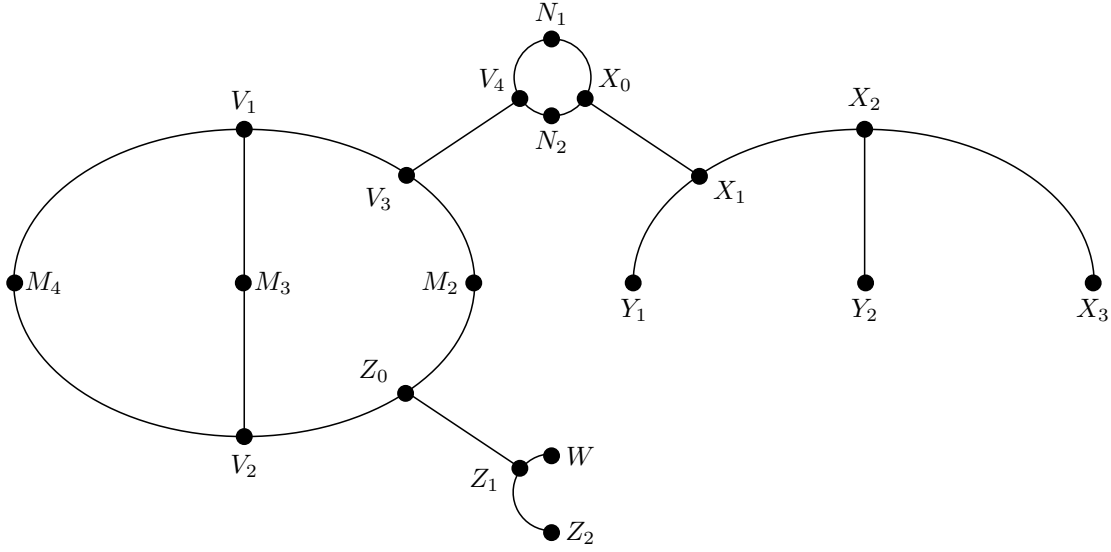
$\alpha_i \in E(T)$	$\ell(\alpha_i)$	$e = \varphi^{-1}(\alpha_i) \in E(\Gamma_1) \ (d_e(\varphi))$
α_1	$\ell_1/2$	$[M_1, V_1], [V_2, X_2], [X_3, Y_3]$
α_2	$\ell_1/2$	$[M_1, V_4], [V_3, X_3], [X_2, Y_2]$
α_3	$\ell_3/2$	$[V_1, M_3], [V_2, M_3], [Z_3, Y_3]$
α_4	$\ell_4/2$	$[V_1, M_4], [V_2, M_4], [Z_4, Y_3]$
α_5	$\ell_5/2$	$[V_4, M_5], [V_3, M_5], [Z_5, Y_2]$
α_6	$\ell_6/2$	$[V_4, M_6], [V_3, M_6], [Z_6, Y_2]$
α_7	$\ell_2/2 - \ell_1/2$	$[M_1, N], [X_2, M_2], [X_3, M_2]$

$v \in V(T)$	$\varphi^{-1}(v)$
U_1	V_1, V_2, Y_3
U_2	V_3, V_4, Y_2
U_3	M_3, Z_3
U_4	M_4, Z_4
U_5	M_5, Z_5
U_6	M_6, Z_6
P_0	M_1, X_2, X_3
P_1	N, M_2

(iii) $\ell_1 < \ell_2$ の場合 図5のように, e_1, e_2 は二重辺でも bridge でもループでもない辺で, $\ell_1 < \ell_2$ とする. bridge を e_5 , ループを e_6 とし, 二重辺のうち短いほうの辺を e_3 とする.

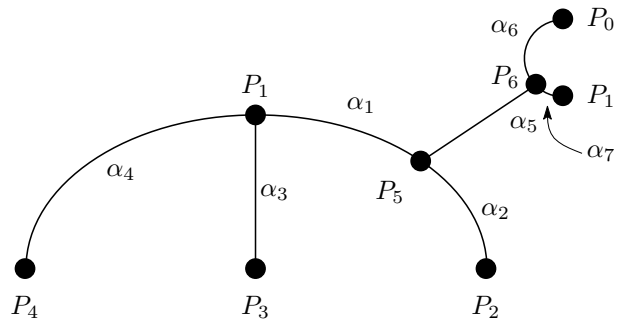


Γ_1 は以下の通りとする.



- M_i : 辺 e_i の中点. ($i = 3, 4$)
- X_0 : e_6 上の点を一つ固定.
- N_i : e_6 上の点で V_4, X_0 から等距離の点. ($i = 1, 2$)
- X_i : X_0 に付け加えた边上の点. $d(X_{i-1}, X_i)$ が順に $\ell_5, \ell_1, \ell_4/2$ となる. ($i = 1, 2, 3$)
- Y_i : X_i に付け加えた辺の端点. $d(X_i, Y_i)$ は順に $\ell_2/2 - \ell_1/2, \ell_3/2$ となる. ($i = 1, 2$)
- Z_0 : $d(V_2, Z_0) = \ell_1$ となる e_2 上の点.
- Z_i : Z_0 に付け加えた边上の点. $d(Z_{i-1}, Z_i)$ は順に $\ell_5, d(V_4, N_1)$ となる. ($i = 1, 2$)
- W : Z_1 に付け加えた辺の端点. $d(Z_1, W) = d(V_4, N_2)$ となる.
- M_2 : V_3, X_0 の中点.

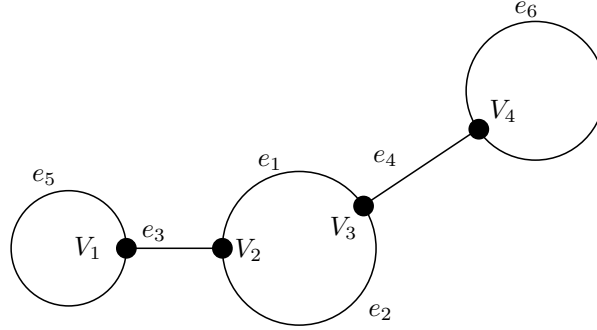
$k := d(X_0, N_1)$ とする. 木 T と φ の対応表は次の通りとなり, $\deg(\varphi) = 3$ となる..



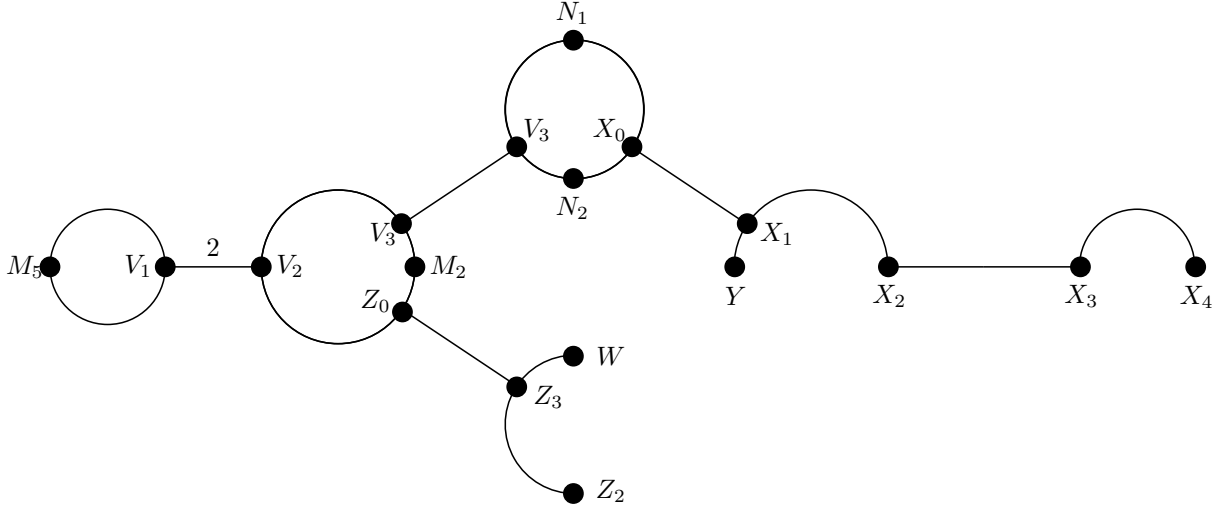
$\alpha_i \in E(T)$	$\ell(\alpha_i)$	$e = \varphi^{-1}(\alpha_i) \in E(\Gamma_1) \quad (d_e(\varphi))$
α_1	ℓ_1	$[V_2, Z_0], [X_1, X_2], e_1$
α_2	$\ell_2/2 - \ell_1/2$	$[V_3, M_2], [Z_0, M_2], [X_1, Y_1]$
α_3	$\ell_3/2$	$[V_1, M_3], [V_2, M_3], [X_2, Y_2]$
α_4	$\ell_4/2$	$[V_1, M_4], [V_2, M_4], [X_2, X_3]$
α_5	ℓ_5	$[X_0, X_1], [Z_0, Z_1], e_5$
α_6	k	$[V_4, N_1], [X_0, N_1], [Z_1, Z_2]$
α_7	$\ell_6/2 - k$	$[V_4, N_2], [X_0, N_2], [Z_1, W]$

$v \in V(T)$	$\varphi^{-1}(v)$
U_1	V_1, V_2, X_2
U_2	M_2, Y_1
U_3	M_3, Y_2
U_4	M_4, X_3
U_5	Z_0, X_1
U_6	V_3, Z_1, X_1
P_0	N_1, Z_2
P_1	N_2, W

(iv) $\ell_1 < \ell_2$ の場合 e_1, e_2 は多重辺であり $\ell_1 < \ell_2$ を満たす. 多重辺に隣り合う bridge のうち短いほうを e_3 とし, 他方を e_4 とする. e_3 と隣り合うループを e_5 とする.

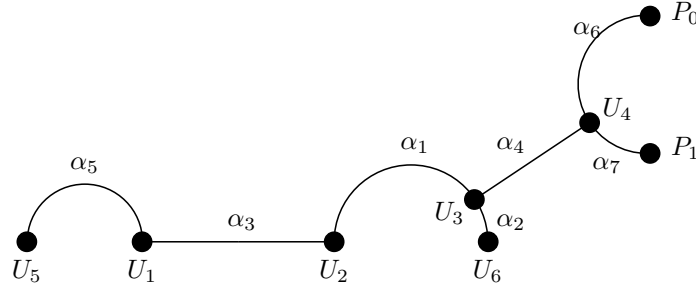


Γ_1 は以下の通りとする.



- $\left\{ \begin{array}{l} M_2, Z_i, W, N_i, X_0, X_1 \text{ は (iii) と同様の点.} \\ M_5: e_5 \text{ の中点.} \\ X_i: X_0 \text{ に付け加えた辺上の点. } d(X_{i-1}, X_i) \text{ はそれぞれ, } \ell_1, 2\ell_3, \ell_5/2 \text{ となる. } (i = 2, 3, 4) \\ Y: X_1 \text{ に付け加えた辺の端点. 辺の長さは } d(X_1, Y) = \ell_2/2 - \ell_1/2 \text{ となる.} \end{array} \right.$

木 T と φ の対応表は次のようになり、 $\deg(\varphi) = 3$ となる.



$\alpha_i \in E(T)$	$\ell(\alpha_i)$	$e = \varphi^{-1}(\alpha_i) \in E(\Gamma_1) \ (d_e(\varphi))$
α_1	ℓ_1	$[X_1, X_2], [V_2, Z_0], e_1$
α_2	$\ell_2/2 - \ell_1/2$	$[V_3, M_2], [Z_0 M_2], [X_1, Y]$
α_3	$2\ell_3$	$[X_2, X_3], e_3(2)$
α_4	ℓ_4	$[X_0, X_1], [Z_0, Z_1], e_4$
α_5	$\ell_5/2$	$[M_5, V_1(\text{上})], [M_5, V_1(\text{下})], [X_0, X_1]$
α_6	k	$[V_4, N_1], [X_0, N_1], [Z_1, Z_2]$
α_7	$\ell_6/2 - k$	$[V_4, N_2], [X_0, N_2], [Z_1, W]$

$v \in V(T)$	$\varphi^{-1}(v)$
U_1	V_1, X_3
U_2	V_2, X_2
U_3	V_3, Z_0, X_1
U_4	V_4, Z_1, X_0
U_5	M_5, X_4
U_6	M_2, Y_1
P_0	N_1, Z_2
P_1	N_2, W

以上より超楕円的でない種数 3 の非特異トロピカル曲線 C には、代表元 Γ_1 として、 $\text{gon}(\Gamma_1) = 3$ となるものが取れたので、超楕円的でない場合について $\text{gon}(C) = 3$ が示せた.

命題 4.1.3 図 5 の超楕円的でないグラフの距離付きグラフとしてのゴナリティは各辺の長さによる.

証明の前に次の二つの補題を与える.

補題 4.1.4 非特異距離付きグラフの標準モデル Γ はループを持つとし、ループの端点である頂点を v とする. Γ から木への有限調和射 φ があるとき、 $\text{val}(\varphi(v)) < 3$ となり、 $\deg(\varphi) \geq 2$ となる.

証明 命題 2.1.5 より、 $\text{val}(\varphi(v))$ の最大値は 3 とわかる. $\text{val}(\varphi(v)) = 3$ と仮定する. $\varphi(v)$ から出ている辺をそれぞれ、 a, b, c し、 v のループでない辺は a に移るとする. φ により、木へ移ることから、ループの v でない点で価数が 1 のものが存在するので、これを p とする. p は、 b の端点であるとしてよい. ループ上の v 以外の点は価数が 2 なので命題 2.1.5 より、 $\varphi(v)$ には移らないことと、 φ が木に移ることから、ループから v をのぞいたか部分は、 b から $\varphi(v)$ を除いた部分に移るが、これは φ が点 v で調和であることの定義を満たさない. よって $\text{val}(\varphi) < 3$ となる.

補題 4.1.5 非特異距離付きグラフの標準モデル Γ は三重辺でない二重辺を持つとし、二重辺の端点を v_0, v_1 とし、二重辺を e_1, e_2 とする. また v_1, v_2 から出る、二重辺でない辺

をそれぞれ f_1, f_2 と呼ぶ. Γ から木への有限調和射 φ があるとき, $\text{val}(\varphi(v_i)) = 3$ ならば, $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ となる.

証明

$\text{val}(\varphi(v_1)) = 3$ と仮定し, $\varphi(v_1)$ の辺 a, b, c のうち, a が二重辺でない辺から移ったものであるとする. 補題 4.1.4 と同様の議論により $\{v_1, v_2\} = e_1 \cap e_2 = b \cap c = \varphi(v)$ とわかる.

注 4.1.3 の証明 (ii), (iii), (iv) の各場合について, 距離付きグラフとしてのゴナリティが 3 とならない例を与える. 各距離付きグラフ Γ に対して, 木 T への有限調和射 φ が与えられているとする. 以降 $d_e(\varphi)$ や, 頂点 v での φ の次数は, d_e, d_v と φ を省略して書く.

ループを含むグラフのほうが扱いやすいので, 先に (iii), (iv) のグラフを扱う. 補題 4.1.4 より, ループと隣り合う辺とループは一つの辺 e とみなせる. ただし, $d_e(\varphi)$ は, 2 以上の値を任意に取れることに注意する.

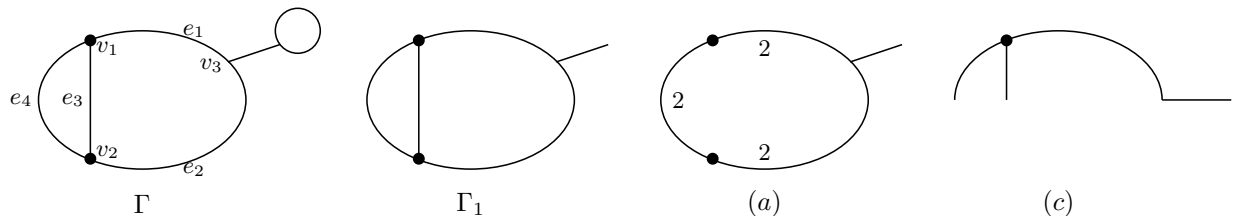
(iii) $\ell_1 = 3\ell_2, \ell_3 = \ell_4$ の場合

e_5, e_6 のループをつぶして辺 e とみなしたグラフを Γ_1 とする. Γ_1 は二重辺を含むので, 補題 4.1.5 より, 次の場合分けで考える.

(a) $\text{val}(\varphi(v_1)) = 2$ の場合 図 (a) のようなループに帰着できる. 補題 4.1.4 の $\deg(\varphi)$ を考えるときの議論から, $d_{v_3} = d_{e_1} + d_{e_2} \geq 2n$ ($n \geq 1$) となる. よって, $\deg(\varphi) \geq d_{v_3} \geq 4$ である.

(b) $\varphi(v_1) = 3$ の場合 補題 4.1.5 の (a) の場合と同様 e_1, e_2 は T の同じ辺に移る. よって, $d_{e_1}(\varphi) = 3, d_{e_2}(\varphi) = 1$ となり, $\deg(\varphi) \geq d_{v_3} = 1 + 3 = 4$ と計算できる.

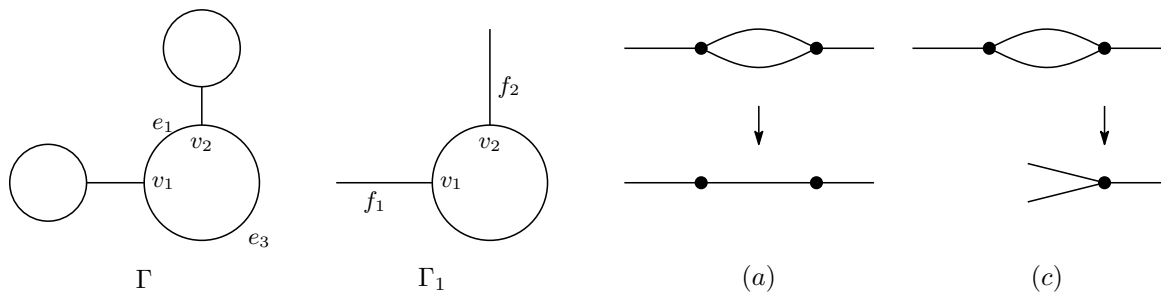
以上よりこの場合 $\text{gon } \Gamma \geq 4$ となる.



(iv) $\ell_1 = 3\ell_2$ の場合 (iii) の場合と同様にループをつぶしたグラフを Γ_1 とする. 簡単のため, f_1, f_2 の長さが等しいと仮定する Γ_1 には, 価数が 3 の頂点が二つ残っているが, これは多重辺の端点なので, 補題 4.1.5 を用いて場合分けをする.

(a) $\text{val}(\varphi(v_1)) = 2$ の場合 図のようになる. $d_{e_1} = 3, d_{e_2} = 1$ であり, $\deg(\varphi) = 4$ と計算できる.

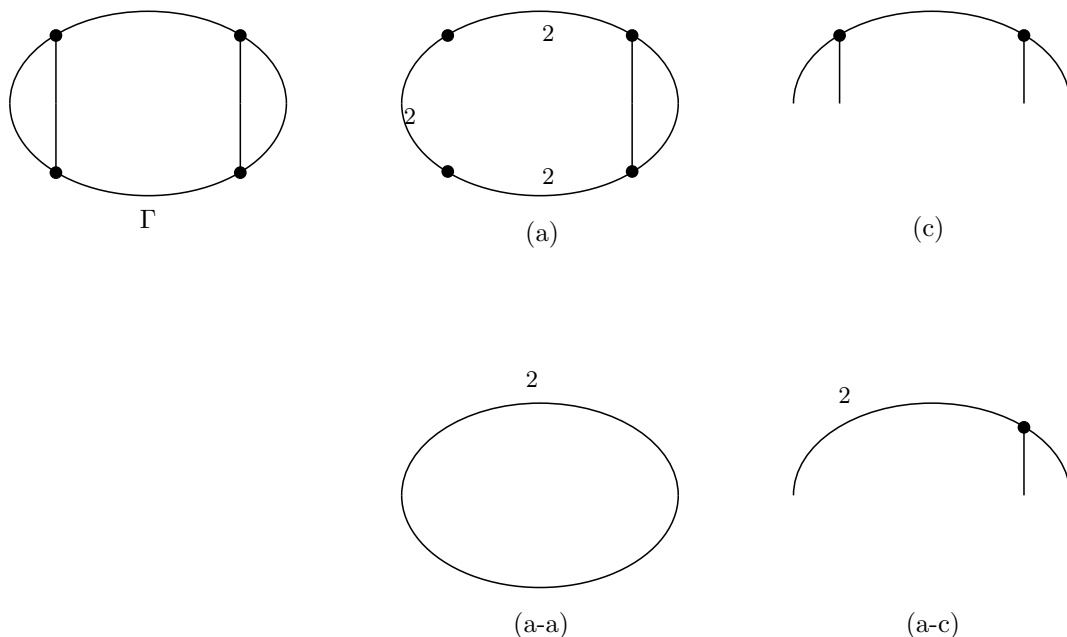
(b) $\text{val}(\varphi(v_1)) = 3$ の場合 図のように x に移る点は v_1, v_2 の二点のみなので, 頂点 x で φ の次数を考えると, $d_{v_1} + d_{v_2} = d_{f_1} + d_{f_2} \geq 4$ であり, 以上より $\text{gon}(\Gamma) \geq 4$ となる.



(ii) $\ell_1 = 3\ell_2, \ell_3 = \ell_4 = \ell_5 = \ell_6$ の場合 この場合二重辺が二つある．左側の二重辺に対して，補題 4.1.5 を用いて場合分けをしていく．

(a) $\text{val}(\varphi(v_1)) = 2$ 図 (a) のような種数 2 のグラフに帰着できる．これは三重辺を持つので，そのうち二つを選んで二重辺とみなし補題 4.1.5 を用いると，図の (a-a)(a-c) のいずれかの形となり，どちらの場合も (a) のグラフ上の点で φ により価数 1 の端点に移り， $d_p = 2$ となるものが存在する，その点を q と呼ぶと， $\deg(\varphi) = d_q = 2 + 2 = 4$ となる．

(c) $\varphi(v_1) = 3$ の場合 木へ移ることを考えると， $d_{e_1} = 3$ となり図の (c) のような木 T へ移る．よって， $\deg(\varphi) \geq d_{v_1} + d_{v_2} = d_{e_1} + d_{e_3} = 4$ とわかる．以上より $\text{gon}(\Gamma) \geq 4$ となる．



4.2 ゴナリティ

また，因子的ゴナリティに関しては，坪井の論文で触れられている．

定理 4.2.1 [T16] 超楕円でない種数 3 の非特異トロピカル曲線 Γ は, strictly divisorially 3-gonal である.

この定理では Γ を型ごとに場合分けして各場合に 3-gonal であることを示し, さらに階数が 1 にとれることを確認している. この定理と本論文の主定理から以下の系が従う.

系 4.2.2 種数 3 の非特異トロピカル曲線に対してゴナリティと因子的ゴナリティは等しい.

参考文献

- [ABBR15] Omid Amini, Mathew Baker, Erwan Brugallé, Joseph Rabinoff, *Lifting harmonic morphisms II: tropical curves and metrized complexes*, Algebra & Number Theory **9**, no. 2 (2015), 267–315.
- [ACG] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip Griffiths, *Geometry of algebraic curves Volume II*, with a contribution by J. Harris, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **268**, Springer-Verlag, 1985.
- [BN09] Mathew Baker, Serguei Norine, *Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs*, International Mathematics Research Notices **15** (2009), 2914–2955.
- [Ca14] Lucia Caporaso, *Gonality of algebraic curves and graphs*, Algebraic and Complex Geometry **71** (2014), 77–108.
- [Ch12] Melody Chan, *Tropical curves and metric graphs*, Univ. of California, Berkeley thesis, 2012.
- [CKK15] Gunther Cornelissen, Fumiharu Kato, Janne Kool, *A combinatorial Li–Yau inequality and rational points on curves*, Mathematische Annalen **361** (2015), 211–258.
- [KY15] Shu Kawaguchi, Kazuhiko Yamaki, *Rank of divisors on hyperelliptic curves and graphs under specialization*, International Mathematics Research Notices **12** (2015), 4121–4176.
- [T16] 坪井友里奈, 種数 3 のトロピカル曲線のモジュライ空間および trigonality, 首都大学東京修士論文, 2016.